Conseils et Méthodes

■ Comment démontrer qu'une suite (u_n) est :

* Arithmétique :

- En montrant qu'il existe $k \in IR$ tel que pour tout $n \in IN$ on a :

$$u_{n+1} - u_n = k$$

- En montrant qu'il existe a et b réels ($b \neq 0$) tels que, pour tout $n \in IN$ on a : $u_n = a + n\,b$.

* Géométrique :

- En montrant qu'il existe $q \in IR$ tel que, pour tout $n \in IN$ on a :

$$u_{n+1} = q\,u_n$$

- En montrant qu'il existe a et b réels tel que pour tout $n \in IN$ on a :

$$u_n = a(b)^n$$

* Croissante (resp. décroissante) :

- En montrant que, pour tout n dans IN; $u_{n+1} - u_n > 0$ (resp. $u_{n+1} - u_n < 0$).
- En montrant que dans le cas ou : $u_n = f(n)$, la fonction f est croissante (resp. Décroissante).

- En montrant que, pour tout n dans IN ; $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ (resp. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$) ; pour (u_n) suite strictement positive.

- En montrant que, dans le cas où $u_{n+1} = g(n)$, la fonction f définie par : $f(x) = g(x) - x$ est positive sur l'intervalle considéré.

*** Majorée (resp. minorée) :**

- En utilisant les méthodes connues sur les inégalités.
- En utilisant, dans le cas où $u_n = f(n)$, le fait que f est majorée ou bien minorée sur un intervalle de type $[p,+\infty[$.

*** Convergente :**

- En montrant que (u_n) est géométrique dont la raison q vérifie : $-1 \leq q \leq 1$.
- En montrant que, dans le cas où $u_n = f(n)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ existe et finie.
- En montrant que, pour $n \geq p$ on a : $w_n \leq u_n \leq v_n$ avec (w_n) et (v_n) sont deux suites convergentes.
- En montrant que, dans le cas où : $u_{n+1} = f(u_n)$, les conditions d'application de l'inégalité des accroissements finis sont vérifiés (avec l'équation $f(x) = x$ admettant une solution unique x_0 dans l'intervalle I) puis, à l'aide d'une inégalité du type : $|u_n - x_0| \leq q^n |u_0 - x_0|$; $|q| < 1$ .Pour Savoir plus

Travaux pratiques

I°/ Suites : u $\mapsto$ f(n) où f est une fonction usuelle

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]a,+\infty[$ alors on peut définir la suite u par u(n) = f(n) pour n > a.

Lorsque f est une fonction usuelle, il est avantageux, pour l'étude de u ; d'étudier la fonction f elle-même car on sait que :

- La monotonie de f entraîne celle de u.
- Si f est majorée, minorée ou bornée sur $]a,+\infty[$ alors u l'est aussi.
- Si f a une limite ℓ ($\ell = \infty$ ou $\ell \in$ IR) en $+\infty$ alors la suite u à pour limite ℓ

De façon générale, dans le pratique, on ne dit pas « soit f la fonction définie par : f : x $\mapsto$ f(x) =… et soit u la suite définie par

u_n = f(n) .Mais c'est à l'élève de trouver une fonction usuelle f telle que, $\forall n \in$ IN On ait u_n = f(n).

Etudes de quelques autres cas :

Parfois on ne peut pas trouver les fonctions usuelles telles que, pour tout naturel n on a : u_n = f(n);C'est le cas par exemple, pour la suite u définie pour tout n par $(-1)^n$

Pour étudier une telle suite, il faut alors utiliser d'autres méthodes, par exemple les définitions des suites monotones , majorées,…

Comparaison avec une suite géométrique :

L'idée directrice est la suivante : pour une suite géométrique u à termes strictement positifs et de raison q , on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ et l'on sait que la connaissance de q renseigne sur le comportement à l'infini de la suite u . D'où , pour une suite quelconque u dont il n'est pas

facile d'étudier la limite par les théorèmes usuels ,d'étudié la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et de voir ce que l'on peut déduire pour la suite u elle même ; cela suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ existe, c'est à dire qu'a partir d'un certain rang on ait $u_n \neq 0$.

Pour simplifier, On considère une suite u dont l'ensemble de définition est IN et dont les termes sont tous positifs.

1°/ On suppose que, pour tout n,on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$, ou k est un réel de]0,1[.

a) Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a : $0 < u_n \leq k^n u_0$.

b) Démontrer que la suite u à pour limite zéro.

2°/ Application :

a) Montrer que la suite définie par : $u_n = \frac{10^n}{n!}$; pour $n \in IN$.

b) Montrer que la suite u définie par $u_1 = 1$ et la condition :

$\forall n \geq 0$ on a : $u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 3}$; converge vers zéro.

Problème de sens de variation :

On sait que la monotonie de la fonction f n'implique pas nécessairement la monotonie de la suite u définie par la donnée de u_0 et pour tout n on a : $u_{n+1} = f(u_n)$

Mais il est de cas où la connaissance du sens de variation de f permet de conclure.

Par exemple supposons que f est croissante sur un intervalle I ,u_0 dans I , et le cas usuel f(I) est inclus dans I ; Supposons en outre

$u_1 \geq u_0$; Alors on peut dire que u est croissante.

En effet ces hypothèses implique $f(u_1) \geq f(u_0)$, soit $u_2 \geq u_1$ puis que $f(u_2) \geq f(u_1)$, soit $u_3 \geq u_2$ … et un raisonnement par récurrence permet de conclure. Que se passe-t-il si :

- si f est croissante sur I et $u_1 < u_0$?
- si f est décroissante sur I et $u_1 \geq u_0$?
- si f est décroissante sur I et $u_1 \leq u_0$?

Retenons donc que la connaissance du sens de variation de f et la place de u_0 par rapport à u_1 permettra parfois de conclure plus rapidement l'étude du sens de variation de u.

Utilisation de la fonction dérivée : **f(x) = $1+\frac{2}{x}$.**

On peut traiter cet exercice d'une autre façon en utilisant le fait que au voisinage de 2 la fonction dérivée f' de f est bornées en valeur absolue par un réel k < 1. En effet, pour tout réel x non nul, on a :

$$f'(x) = \frac{-2}{x^2} \text{ et } \forall x \in [\frac{3}{2},3]$$

Par exemple on a : $\frac{9}{4} \leq x^2 \leq 9$ d'ou $\frac{2}{9} \leq \frac{2}{x^2} \leq \frac{8}{9}$ et $|f'(x)| \leq \frac{8}{9}$ ensuite il

est facile de voir que l'image de $[\frac{3}{2},3]$ est $[\frac{5}{3},\frac{7}{3}]$ qui est incluse dans $[\frac{3}{2},3]$. Ainsi dés que u_n appartient à $[\frac{3}{2},3]$ on a : $u_{n+1} = f(u_n)$ lui aussi appartient; Comme $u_1 = 3$, tous les termes u_n suivants sont dans l'intervalle $[\frac{3}{2},3]$ Or les inégalités des accroissement finis sous la forme : $\forall$ x et y de $[\frac{3}{2},3]$ ona : $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$ où M est un réel tel que $|f'(x)| \leq M$ pour $x \in [\frac{3}{2},3]$; permet 'écrire $\forall n \geq 1 : |f(u_n)-2| \leq \frac{8}{9}|u_n-2|$;

Donc en tenant compte de f(2) = 2 et $u_n = u_{n+1}$ on a :

$\left| u_{n+1} - 2 \right| \leq \frac{8}{9} \left| u_n - 2 \right|$ et en itérant n fois on obtient : $\left| u_n - 2 \right| \leq \left(\frac{8}{9} \right)^n \left| u_1 - 2 \right|$.

On peut faire aussi un raisonnement par récurrence.

a) Montrer que la suite converge vers 2.

b) A partir de quel rang n a-t-on $\left| u_n - 2 \right| \leq 10^{-4}$?

Notons que le résultat n'a pu être acquis que sous l'hypothèse très forte $\left| f' \right| \leq k$ sur $[\frac{3}{2}, 3]$ avec k strictement inférieur à 1 ;c'est cette hypothèse qui permet de conclure à la convergence vers 0 de

$n \mapsto \left(\frac{8}{9} \right)^n$ donc la convergence de u.

<u>Un calcul d'aire :</u>

Soit $(o, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé. ξ est la courbe de la fonction $x \mapsto x^2$ retreinte à [0,1].

On se propose de chercher l'aire du domaine D limité par les droites x = 0 ; x = 1 ; y = 0 et la courbe ξ. **Faire une figure**

D est donc l'ensemble des points M (x,y) avec :

$$0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq f(x) .$$

Une méthode consiste à inscrire dans le domaine des rectangles dont on sait calculer les aires, et à circonscrire ce domaine par des rectangles.

L'intervalle [0,1] ayant été devisé en n segments de longueur $\frac{1}{n}$ on note : A_n l'aire totale des rectangles inscrits, ; A'_n est l'aire totale des rectangles circonscrits

Alors $\forall n \geq 1$ on a :

$$A_n \leq \text{aire de D} \leq A'_n.$$

1°/ Montrer que l'on a : $A_n = \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2]$

et $A'_n = \frac{1}{n^3}[1^2 + 2^2 + ... + n^2]$

2°/ Démontrer par récurrence que $\forall n \geq 1$ on a : $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3°/ a) Montrer que : $A_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$ et que $A'_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$.

b) Montrer que les suites (A_n) et (A'_n) ont chacune une limite et que ces limites sont égales. Quelle est alors l'aire de D ?

Equations f(x) = 0.

Soit f une fonction de la variable réelle. L'équation f(x) = 0 d'inconnue x, est en général impossible à résoudre par les méthodes algébriques.

L'analyse permet plus généralement de prouver l'existence de solutions et de calculer des approximations de bonnes précisions.

Nous allons, sur des exemples, utiliser quelques méthodes de l'analyse numérique pour déterminer à une précision donnée des approximations décimales d'une solution α d'une équation

f(x) = 0. Toutes ses méthodes supposent, avant d'être mise en œuvre, que l'on ait localisé la solution α ; c'est-à-dire que l'on ait trouvé un intervalle]a,b[qui contienne α et qui ne contienne pas d'autres solutions de l'équation ; En d'autre termes que l'on ait trouvé un intervalle]a,b[dans laquelle f ne s'annule qu'une seule fois. Dans le pratique on a intérêt à choisir un intervalle de faible amplitude.

Dichotomie :

Nous allons rappeler la méthode de dichotomie qui n'est pas une méthode très performante. La méthodes consiste à définir deux suites u et v , en posant $u_0 = a$ et $v_0 = b$, puis pour tout naturel

$n \geq 1$:

- si $f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) f(u_n) > 0 \quad \text{on pose} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = v_n$

- si $f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) f(u_n) < 0 \quad \text{on pose} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $u_{n+1} = u_n$.

a) Si $b - a = 1$, jusqu'à quelle étape faut-il parvenir pour avoir une approximation à 10^{-3} prés ?

b) Soit l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$; Montrer qu'elle a une seule solution dans l'intervalle [0,1] ; Noter α cette solution.

Donner une approximation de α à 10^{-3} prés.

La méthode d'itération ou algorithme de Babylone :

Babylone a utiliser cette méthode pour calculer la racine carrée d'un réel positif a.

Exposons sa méthode dans un cas des plus simples celui où a = 2

Remarquer que calculer $\sqrt{2}$ revient à chercher la solution positive de l'équation $x^2 - 2 = 0$.

Soit u_0 un réel strictement positif .

Si $u_0 < \sqrt{2}$ alors $\frac{2}{u_0} > \sqrt{2}$ et si $u_0 > \sqrt{2}$ alors $\frac{2}{u_0} < \sqrt{2}$.

On peut donc estimer que la moyenne arithmétique de u_0 et

de $\frac{2}{u_0}$ sera plus proche de $\sqrt{2}$ que de u_0. cette moyenne est représentée par le milieu de

l'intervalle d'extrémités u_0 et $\frac{2}{u_0}$.

On pose $u_1 = \frac{1}{2}(u_0 + \frac{2}{u_0})$. En étirant le processus, on définit une suite u par la donnée du premier terme u_0 (ici on prend $u_0 = 1$) et la condition pour tout naturel n on a : $\mathbf{u_{n+1}} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$.

indication : f est la fonction définie sur IR^* par $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$

et I est l'intervalle $]0,+\infty[$; montrer que $f(I) \subset I$.

* Si la suite u converge, alors qu'elle est sa limite ?
* Montrer que la suite u est décroissante a partir du rang 1.

(observer que l'on a $u_1 > \sqrt{2}$ et que l'image de l'intervalle $[\sqrt{2}, +\infty[$ est $[\sqrt{2}, +\infty[$, et que sur cet intervalle on a $f(x) \leq x$)

* Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5. Observer la rapidité remarquable de la convergence.

Méthode de la sécante :

La solution de l'équation f(x) = 0 ayant été localisée dans l'intervalle [a,b] l'idée de la méthode consiste à remplacer la fonction f par la fonction affine représentée graphiquement par la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées (a, f(a)) et (b, f(b)). **Faire une figure.**
La droite (AB) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse u_1 avec $f(u_1) < 0$.
On réitère en cherchant l'abscisse u_2 du point d'intersection de (BB_1) avec l'axe des abscisses,…
Si f(a) < 0 et f(b) > 0, on construit une suite u définie par :

$u_0 = a$ et pour tout naturel n on a : $u_{n+1} = F(u_n)$ où F est la fonction définie sur [a,b[par : $F(x) = x - \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $g(x) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$.

1°/ Expliquer comment a été établie cette expression de u_{n+1}

en fonction de u_n.

2°/ f est le polynôme défini sur IR par : $f(x) = x^3 + x + 1$.

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$, d'inconnue x , possède une seule solution dans l'intervalle] 0,1[. On note α cette solution.
b) Ecrivez explicitement, dans ce cas les fonctions f, g et F ainsi que la suite u .
c) Calculer des approximations de α .

Commentaires :

* Dans le cas d'une courbe convexe si l'on a $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$, on définit la suite u de la manière suivante : $u_0 = b$ et $u_{n+1} = F(u_n)$

avec $F(x) = x - \frac{f(x)}{g(x)}$ et $g(x) = \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$

* Cette méthode exige que la dérivée seconde soit de signe constant, pour que la courbe reste concave (tournée vers le bas) ou convexe (tournée vers le haut).

La méthode de Newton :

la solution de l'équation $f(x) = 0$ ayant été localisée dans l'intervalle [a,b], l'idée de la méthode consiste à remplacer la fonction f par
la fonction affine représenter par une tangente a la courbe :
Si $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, alors la courbe est convexe ; on trace la tangente à la courbe au point B de coordonnées (b ;f(b)) .

Faire une figure.

On calcule l'abscisse u_1 du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses (on a posé $u_0 = b$) . Calculer u_1.

Puis on considère le point B_1 (u_1 ;$f(u_1)$) et à partir de B_1 on trace la tangente à la courbe, elle coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse u_2 et on continue le processus. On est donc conduit à envisager une suite u définie par :

$u_0 = b$ et pour tout naturel n ; $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.

Montrer que , pour l'équation $x^2 - a = 0$ où a est un réel positif, l'algorithme de Newton est l'algorithme de Babylone.